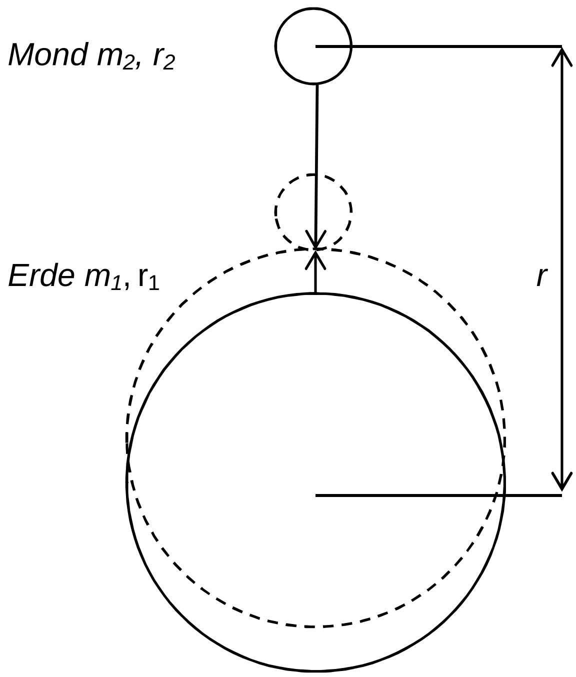
3. Wirkung der Gravitation

Wenn sich zwei Massen in Folge von Gravitation aufeinander zu bewegen, kommt die dafür notwendige Energie aus dem Gravitationsfeld, das aus den zerfallenden Massen gespeist wird. Am Beispiel von Erde und Mond als idealisierte Kugeln soll die Geschwindigkeit ausgerechnet werden, die beide Massen erhielten, wenn sie sich ausgehend von ihrem mittleren realen Abstand aus einem theoretischen Ruhezustand bis zum Zusammenstoß aufeinander zu bewegten.



<u>Legende</u>

$m_1 = m_{Er} =$	$5{,}977\ 10^{24}$ kg
$m_2 = m_{Mo} =$	$7{,}352\ 10^{22}$ kg
$r_1 = r_{Er} =$	$6{,}378\ 10^{6}$ m
$r_2 = r_{Mo} =$	$1{,}738\ 10^{6}$ m
$r =$	$3{,}844\ 10^{8}$ m
$h =$	*Oberflächenabstand*
$\gamma =$	$6{,}673\ 10^{-11}$ Nm²/kg²
Index a	*Ruheposition*
Index b	*Bewegungszustand beim Zusammenstoß*

<u>Abb. 03-01:</u> 2-Massen-Anordnung (ohne Maßstab)

Die Arbeit, die verrichtet wird, bis sich die beiden Massen berühren, lässt sich wie folgt berechnen:[8]

$$E_{grav} = \int_{r_1+r_2}^{r} F_{grav} ds = \int_{r_1+r_2}^{r} \gamma \frac{m_1 m_2}{s^2} ds = -\gamma \frac{m_1 m_2}{s} \Big|_{r_1+r_2}^{r}$$

$$E_{grav} = -\gamma m_1 m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1+r_2}\right) = \gamma m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_1+r_2} - \frac{1}{r}\right)$$

Außerdem muss für beide beschleunigten Massen unter Einbeziehung von Gravitation und relativistischer Massenänderung beim Aufprall die Energieerhaltung gelten:

$$E_{pot} = E_{grav} = E_{kin1} + E_{kin2} = \Delta m_1 c^2 + \Delta m_2 c^2 \qquad [03\text{-}01]$$

Es kann demzufolge geschrieben werden:

$$\gamma m_{1a} m_{2a} \left(\frac{1}{r_1+r_2} - \frac{1}{r}\right) = (m_{1b} - m_{1a})c^2 + (m_{2b} - m_{2a})c^2 \qquad [03\text{-}02]$$

---

[8] Bspw. Dieter Meschede, Gerthsen Physik, S. 49, Springer- Verlag Heidelberg, 2002, ISBN 3-540-42024-X

In relativistischer Schreibweise lässt sich die Formel dann wie folgt angeben:

$$\gamma m_{1a} m_{2a} \left(\frac{1}{r_1+r_2} - \frac{1}{r}\right) = \frac{m_{1a}c^2}{\sqrt{1-\frac{v_{1b}{}^2}{c^2}}} - m_{1a}c^2 + \frac{m_{2a}c^2}{\sqrt{1-\frac{v_{2b}{}^2}{c^2}}} - m_{2a}c^2$$

Für Geschwindigkeiten, die deutlich unter der Lichtgeschwindigkeit liegen, kann diese Gleichung mittels bekannter Reihenentwicklung in folgende Form gebracht werden:

$$\gamma m_{1a} m_{2a} \left(\frac{1}{r_1+r_2} - \frac{1}{r}\right) = \frac{m_{1a}}{2} v_{1b}{}^2 + \frac{m_{2a}}{2} v_{2b}{}^2 \qquad [03\text{-}03]$$

Es gilt nämlich allgemein für die kinetische Energie bei kleinen Geschwindigkeiten:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_b{}^2}{c^2}}} - 1\right) m_a c^2 = \frac{m_a}{2} v_b{}^2$$

Daraus folgt dann: $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_b{}^2}{c^2}}} = \frac{v_b{}^2}{2c^2} + 1$ [03-04]

Zwischen beiden Massen gilt außerdem die relativistische Impulserhaltung:

$$\frac{m_{1a}}{\sqrt{1-\frac{v_{1b}{}^2}{c^2}}} v_{1b} = m_{1b} v_{1b} = \frac{m_{2a}}{\sqrt{1-\frac{v_{2b}{}^2}{c^2}}} v_{2b} = m_{2b} v_{2b}$$

Die gleiche o.g. Reihenentwicklung für kleine Geschwindigkeiten der Massen führt mit [03-04] zu folgendem Ausdruck:

$$m_{1a} v_{1b} + m_{1a} \frac{v_{1b}{}^3}{2c^2} = m_{2a} v_{2b} + m_{2a} \frac{v_{2b}{}^3}{2c^2}$$

Obwohl die kleinen Geschwindigkeiten beider Massen hier in der dritten Potenz eingehen, können die Terme wegen des Quadrates der Lichtgeschwindigkeit im Nenner immer noch vernachlässigt werden. Deshalb kann vereinfacht geschrieben werden:

$$m_{1a} v_{1b} = m_{2a} v_{2b} \qquad [03\text{-}05]$$

Aus dem Gleichungssystem [03-03] und [03-05] folgt unmittelbar:

$$v_{1b} = \sqrt{\frac{2\gamma m_{2a}}{\frac{m_{1a}}{m_{2a}}+1} \left(\frac{1}{r_1+r_2} - \frac{1}{r}\right)} \qquad \boxed{v_{1b} = \sqrt{\frac{2\gamma m_{2a}}{\frac{m_{1a}}{m_{2a}}+1} \frac{h}{r(r-h)}}} \qquad [03\text{-}06]$$

$$v_{2b} = \sqrt{\frac{2\gamma m_{1a}}{\frac{m_{2a}}{m_{1a}}+1} \left(\frac{1}{r_1+r_2} - \frac{1}{r}\right)} \qquad \boxed{v_{2b} = \sqrt{\frac{2\gamma m_{1a}}{\frac{m_{2a}}{m_{1a}}+1} \frac{h}{r(r-h)}}} \qquad [03\text{-}07]$$

Es ist offensichtlich, dass für die Geschwindigkeit einer sehr kleinen Masse m_2, die sich auf eine sehr große m_1 zubewegt, vereinfacht gilt:

$$v_{2b} = \sqrt{2\gamma m_{1a} \frac{h}{r(r-h)}}$$

Ausgehend von den Werten der Legende von Abb. 03-01 hat die Erde nach [03-06] eine Endgeschwindigkeit von 120 m/s und der Mond nach [03-07] eine von 9.749 m/s.

Es soll nun die Zeitdilatation der Massen betrachtet werden. Je größer die Masse (bedingt durch Gravitationswirkung oder Geschwindigkeit), desto langsamer vergeht die Zeit. Wie später im Kapitel 7 gezeigt wird, gibt es eine Symmetrie zwischen Masse und Zeit. Es gelten vergleichbare relativistische Formeln.

Bspw. Friedrich W. Seemann[9] erklärt die Zeitdilatation mit Hilfe der nicht möglichen Frequenzänderung einer Atomuhr beim freien Fall im Schwerefeld.

Mit den Gleichungen [03-01] und [03-02] kann geschrieben werden:

$$\frac{\gamma m_{2a}}{c^2}\left(\frac{1}{r_1+r_2}-\frac{1}{r}\right)-\frac{\Delta m_2}{m_{1a}}=\frac{\Delta m_1}{m_{1a}} \qquad [03\text{-}08]$$

Mit Gleichung [02-11] gilt unter Einbeziehung der Zeitdilatation:

$$\frac{\gamma m_{2a}}{c^2}\left(\frac{1}{r_1+r_2}-\frac{1}{r}\right)-\frac{\Delta m_2}{m_{1a}}=-\frac{\Delta t_1}{t_{1b}} \qquad [03\text{-}09]$$

Umgestellt nach der Zeitdilatation folgt daraus:

$$\Delta t_1=\left[\frac{\Delta m_2}{m_{1a}}-\frac{\gamma m_{2a}}{c^2}\frac{h}{r(r-h)}\right]t_{1b} \qquad [03\text{-}10]$$

Es wird der Zeitfluss t_{1b} entsprechend der Herleitung für Gleichung [16-05] eingesetzt:

$$\Delta t_1=\left[\frac{\Delta m_2}{m_{1a}}-\frac{\gamma m_{2a}}{c^2}\frac{h}{r(r-h)}\right]\frac{2t_{1a}c^2}{2c^2+{v_{1b}}^2} \qquad [03\text{-}11]$$

Mit Gleichung [03-06] für die Geschwindigkeit lässt sich schreiben:

$$\Delta t_1=\left[\frac{\Delta m_2}{m_{1a}}-\frac{\gamma m_{2a}}{c^2}\frac{h}{r(r-h)}\right]\frac{t_{1a}}{1+\frac{\gamma m_{2a}}{\left(\frac{m_{1a}}{m_{2a}}+1\right)c^2}\frac{h}{r(r-h)}} \qquad [03\text{-}12]$$

Es soll der Ausdruck Δm_2 ersetzt werden. Mit den Konventionen von [03-01] gilt:

$$E_{kin2}=\Delta m_2 c^2=\frac{m_{2a}}{2}{v_{2b}}^2$$

Daraus ergibt sich dann folgender Ausdruck für die Zeitdilatation:

$$\Delta t_1=\left[\frac{{v_{2b}}^2 m_{2a}}{2\,c^2\,m_{1a}}-\frac{\gamma m_{2a}}{c^2}\frac{h}{r(r-h)}\right]\frac{t_{1a}}{1+\frac{\gamma m_{2a}}{\left(\frac{m_{1a}}{m_{2a}}+1\right)c^2}\frac{h}{r(r-h)}} \qquad [03\text{-}13]$$

[9] Friedrich W. Seemann, Was ist Zeit ?, S. 98, S. 268, Wissenschaft und Technik Verlag Berlin, 2002, ISBN 3-89685-501-8

Mit der Geschwindigkeit der Masse m_2 nach [03-07] gilt dann:

$$\Delta t_1 = \left[\frac{\gamma}{\left(\frac{m_{2a}}{m_{1a}}+1\right) c^2} \frac{h}{r(r-h)} m_{2a} - \frac{\gamma m_{2a}}{c^2} \frac{h}{r(r-h)}\right] \frac{t_{1a}}{1+\frac{\gamma m_{2a}}{\left(\frac{m_{1a}}{m_{2a}}+1\right)c^2} \frac{h}{r(r-h)}} \qquad [03\text{-}14]$$

Dieser Ausdruck kann noch weiter vereinfacht werden. Es folgt die Zeitdilatation der Masse m_1 auf der Oberfläche von m_2, die in Folge von Schwerkraft im Vergleich zum Oberflächenabstand h zwischen beiden Massen auftritt und die damit ohne Anwendung der Allgemeinen Relativitätstheorie berechnet werden kann:

$$\boxed{\Delta t_1 = -\frac{t_{1a}}{\frac{c^2\, r(r-h)\,(m_{1a}+m_{2a})}{h\, {m_{2a}}^2\, \gamma}+1}} \qquad [03\text{-}15]$$

Völlig symmetrisch folgt für die Zeitdilatation von m_2, die auf der Oberfläche der Masse m_1 gegenüber einem Oberflächenabstand h zwischen den Massen auftritt:

$$\boxed{\Delta t_2 = -\frac{t_{2a}}{\frac{c^2\, r(r-h)\,(m_{1a}+m_{2a})}{h\, {m_{1a}}^2\, \gamma}+1}} \qquad [03\text{-}16]$$

Sofern eine Masse in Folge der Gravitation zum Massenschwerpunkt beschleunigt wird, gilt die Gleichheit der gravitativen und der geschwindigkeitsbedingten Zeitdilatation!

Eine Masse m_2, die sich an der Oberfläche von m_1 aufhält, erfährt gegenüber ihrem Aufenthalt auf dem Höhenniveau h die gleiche Zeitdilatation, die sich beim Erreichen ihrer Endgeschwindigkeit ergäbe, wenn sie aus dieser Höhe auf die Masse m_1 fiele.

Wenn zwei Massen in gravitativer Wechselwirkung stehen, muss es auch für jede der beiden Massen eine Zeitdilatation geben. Ist die eine Masse sehr klein in Bezug auf die andere (bspw. ein Stein, der auf die Erde fällt), wird natürlich die große Masse kaum beeinflusst. Es gilt jedoch das Prinzip zweier korrespondierender Systeme.

Ein kugelförmiges Raumschiff soll sich in 300.000 m Höhe über der Erde befinden. Seine Masse beträgt 2.000 kg, sein Radius beträgt 2 m. Wie viel Zeit vergeht auf dem Raumschiff, wenn auf der Erde 1 Sekunde verstreicht (siehe Legende zu Abb. 03-01)?

Mit Gleichung [03-16] ergibt sich eine Zeitdilatation Δt_2 = -3,13 10^{-11} s. Der Wert kommt negativ heraus, weil er sich auf den Erdboden bezieht. Das heißt, während auf der Erde eine Sekunde vergeht, verstreicht auf dem Raumschiff die Zeit von 1 + 3,13 10^{-11} Sekunden.[10] Es ließe sich mit [03-15] auch die Zeitdilatation Δt_1 der Erde gegenüber dem Raumschiff ausrechnen. Sie ist jedoch verschwindend gering.

[10] Ein ähnliches Beispiel, dort berechnet mit der Newtonschen Näherung des Gravitationspotenzials wird unter de.wikipedia.org/wiki/zeitdilatation angegeben